

الوحدة الثالثة

القوى المتوازية المستوية

محصلة القوى المتوازية المستوية

١ - ٣

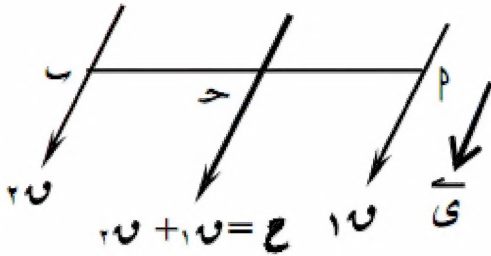
القوى المستوية هى القوى التى تقع خطوط عملها فى مستوى واحد وهذه القوى إما أن تتقاطع خطوط عملها فى نقطة واحدة أو تتقاطع خطوط عملها فى أكثر من نقطة أو تكون خطوط عملها متوازية وتسمى القوى فى هذه الحالة " القوى المتوازية المستوية "

ولإيجاد محصلة القوى المتوازية نبدأ بإيجاد محصلة قوتين متوازيتين ويكون لدينا الحالتين الآتيتين:

أولاً: محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتي الاتجاه:

محصلة قوتين متوازيتين ومتحدتي الاتجاه هى قوة فى اتجاههما ويساوى معيارها مجموع معيارى القوتين ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين بنسبة عكسية لمعياريهما.

أى أنه:



إذا كانت P ، Q فى اتجاه واحد وتؤثران عند P ، Q فإن:

$$\bullet \text{ مقدار المحصلة : } P + Q = R$$

• اتجاه المحصلة : فى نفس اتجاه القوتين

• نقطة تأثير المحصلة: تقسم المسافة بين خطى عمل القوتين

من الداخل (ج د ب) بالنسبة العكسية لمعيار القوتين (المحصلة تكون اقرب للقوة الكبرى)

أى أن: $P \times \text{بعدةا عن المحصلة} = Q \times \text{بعدةا عن المحصلة}$

$$\therefore P \times \text{ج} = Q \times \text{د}$$

نتيجة:

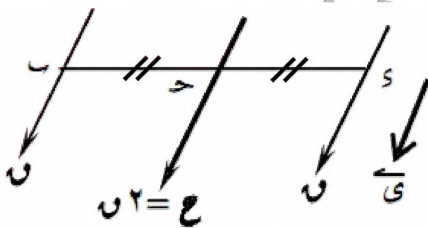
إذا كانت القوتان متساويتان وفى اتجاه واحد فإن:

المحصلة تكون ضعف إحداهما وفى اتجاههما وتنصف المسافة بينهما

أى أنه إذا كانت $P = Q$ فإن:

$$P = Q = R$$

وفى اتجاههما ويكون $\text{ج} = \text{د}$



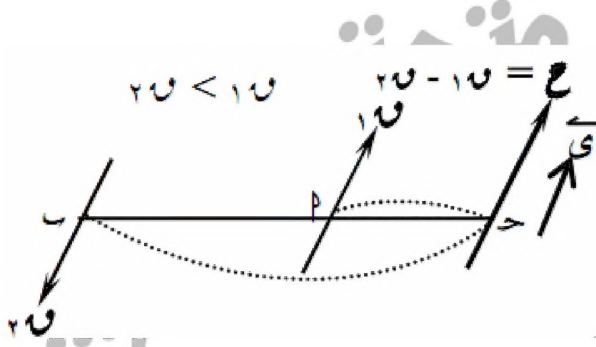
ملاحظة هامة:

عندما تكون القوتان المتوازيتان فى اتجاه واحد فإن:

- (١) المحصلة تعمل بين القوتين
- (٢) المحصلة أقرب للقوة الكبرى
- (٣) المحصلة أكبر من القوة الكبرى (المحصلة أكبر من كلا القوتين)

ثانيا: محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الاتجاه:

محصلة قوتين متوازيتين ومتضادتين فى الاتجاه وغير متساويتى المعيار هى قوة فى اتجاه القوة الأكبر معيارا ويساوى معيارها الفرق بين معياريهما ويقسم خط عملها المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج من ناحية القوة الأكبر معيارا بنسبة عكسية لمعياريهما.



أى أنه:

إذا كانت P ، Q فى اتجاهين متضادين حيث $P > Q$ وتؤثران عند P ، Q فإن:

• مقدار المحصلة : $P - Q = R$

• اتجاه المحصلة : فى اتجاه القوة الكبرى

• نقطة تأثير المحصلة: تقسم المسافة بين خطى عمل القوتين من الخارج (جـ P بـ) ومن ناحية القوة الكبرى بالنسبة العكسية لمعيار القوتين (المحصلة تكون أقرب للقوة الكبرى)

أى أن: $P \times \text{بعداها عن المحصلة} = Q \times \text{بعداها عن المحصلة}$

∴ $P \times \text{جـ} = Q \times \text{بـ}$

ملاحظة هامة:

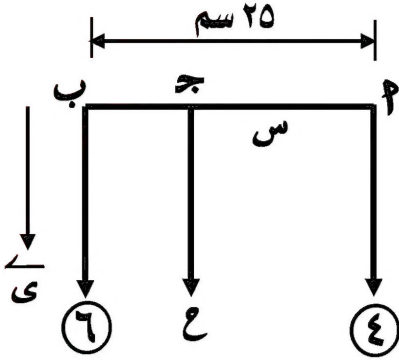
عندما تكون القوتان المتوازيتان فى اتجاهين متضادين فإن:

- (١) المحصلة تعمل خارج القوتين
- (٢) المحصلة أقرب للقوة الكبرى
- (٣) المحصلة أصغر من القوة الكبرى (المحصلة أصغر من احدى القوتين او كلاهما)

مثال:

قوتان متوازيتان يعملان فى نفس الإتجاه مقدارهما ٤ ، ٦ نيوتن تؤثران فى نقطتين ٢ ، ب حيث $٢٥ = \text{أب}$ سم أوجد محصلة القوتين.

الحل:



نفرض \vec{u} متجه وحدة فى إتجاه القوتين

$$\therefore \vec{4} = 4\vec{u}, \quad \vec{6} = 6\vec{u}$$

مقدار واتجاه المحصلة

$$\vec{R} = \vec{4} + \vec{6} = 4\vec{u} + 6\vec{u} = 10\vec{u}$$

نقطة تأثير المحصلة

نفرض أن المحصلة تؤثر عند نقطة ج $\exists \overline{أب} \ni \overline{أج} = س$ حيث $٢٥ = س + \overline{جب}$ $\therefore س - ٢٥ = \overline{جب}$

$$\therefore ١٠ \times س = ٦ \times \overline{جب} \quad \therefore ١٠ \times س = ٦ \times (س - ٢٥) \quad \therefore ١٠٠ = ٦س - ١٥٠ \quad \therefore ٢٥٠ = ٦س - ١٠٠ \quad \therefore ٣٥٠ = ٦س \quad \therefore س = ٥٨.٣٣$$

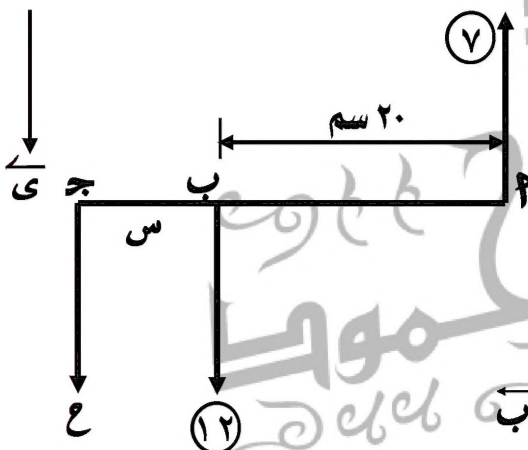
$$\therefore ١٥٠ = ٦س - ١٥٠ \quad \therefore ٣٥٠ = ٦س \quad \therefore س = ٥٨.٣٣$$

أى أن مقدار المحصلة يساوى ١٠ نيوتن وتعمل فى اتجاه القوتين وتؤثر فى نقطة تبعد عن أ بمقدار ١٥ سم

مثال:

أوجد محصلة قوتان متوازيتان متضادتان فى الإتجاه مقدارهما ٧ ، ١٢ نيوتن تؤثران فى نقطتين ٢ ، ب حيث $٢٠ = \text{أب}$ سم.

الحل:



نفرض \vec{u} متجه وحدة فى إتجاه القوة ١٢ نيوتن

$$\therefore \vec{12} = 12\vec{u}, \quad \vec{7} = 7\vec{u}$$

مقدار واتجاه المحصلة

$$\vec{R} = \vec{12} + \vec{7} = 12\vec{u} + 7\vec{u} = 19\vec{u}$$

نقطة تأثير المحصلة

نفرض أن المحصلة تؤثر عند نقطة ج ، $\exists \overline{أب} \ni \overline{أج} = س$ لكن $\overline{أب} = ٢٠$ سم

$$\therefore ١٢ \times س = ٧ \times (٢٠ - س) \quad \therefore ١٢س = ١٤٠ - ٧س \quad \therefore ١٩س = ١٤٠ \quad \therefore س = ٧.٣٦$$

$$\therefore ١٢ \times س = ٧ \times (٢٠ - س) \quad \therefore ١٢س = ١٤٠ - ٧س \quad \therefore ١٩س = ١٤٠ \quad \therefore س = ٧.٣٦$$

∴ ٢٨ سم = ١٤٠ س ∴ ٥ س = ١٤٠ ∴ ٢٨ سم = ١٤٠ س ∴ ٢٨ سم = ١٤٠ س
 أى أن مقدار المحصلة يساوى ٥ نيوتن وتعمل فى اتجاه القوة ١٢ نيوتن وتؤثر فى نقطة خارج القوتين وتبعد
 عن القوة الكبرى عند ب بمقدار ٢٨ سم



عزم القوى المتوازية:

نظرية: مجموع عزوم أى عدد محدود من القوى المتوازية المستوية بالنسبة لأى نقطة يساوى
 عزم محصلة هذه القوى بالنسبة لنفس النقطة.

محصلة عدة قوى متوازية:

لتعيين محصلة عدة قوى متوازية مستوية نتبع الآتى:

(١) نفرض وحدة متجهات \vec{U} فى اتجاه إحدى القوى ونعبر عن هذه القوى بدلالة \vec{U}

$$\vec{U} + \vec{U} + \vec{U} + \vec{U} + \vec{U} = \vec{U}$$

أى أن القياس الجبرى للمحصلة = مجموع القياسات الجبرية للقوى

ومن هذه العلاقة يتعين مقدار المحصلة واتجاهها

(٢) نأخذ العزوم حول أى نقطة فى المستوى فنجد أن:

القياس الجبرى لعزم المحصلة حول نقطة = مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول نفس النقطة
 ومن هذه العلاقة يتعين نقطة تأثير المحصلة.



تعيين إحدى قوتين متوازيتين إذا علمت الأخرى والمحصلة:

إذا علمت إحدى القوتين المتوازيتين \vec{U} ومحصلتها \vec{U} ولتعيين \vec{U} والبعد بين القوتين نتبع الآتى:

(١) نفرض \vec{U} متجه وحدة فى اتجاه \vec{U} ونعبر عن كل من \vec{U} ، \vec{U} بدلالة \vec{U}

(٢) نطبق العلاقة $\vec{U} + \vec{U} = \vec{U}$ ومنها يتحدد مقدار واتجاه \vec{U} ولتحديد مكان عمل \vec{U}
 نجد أنه:

• إذا كانت \vec{U} ، \vec{U} فى اتجاهين متضادين فإن \vec{U} تعمل بينهما

• إذا كانت \vec{U} ، \vec{U} فى اتجاه واحد فإن \vec{U} تعمل خارجهما من جهة الأكبر فيهما

(٣) نطبق النظرية

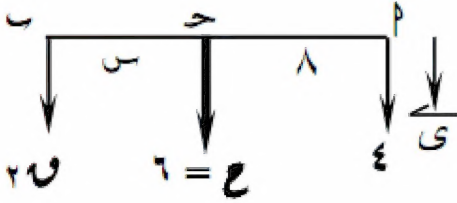
مجموع عزوم القوى حول نقطة تأثير المحصلة = عزم المحصلة حول نفس النقطة = صفر

ومن هذه العلاقة يتحدد بعد \vec{U} عن \vec{U} وبالتالي يتحدد البعد بين القوتين

مثال:

قوتان متوازيتان مقدار محصلتهما ٦ ث. كجم ومقدار إحدى القوتين ٤ ث. كجم وتعمل على بعد ٨ سم من المحصلة أوجد القوة الثانية والبعد بين خطى القوتين إذا كانت القوة المعلومة والمحصلة تعملان:

أولاً: فى اتجاه واحد ثانياً: فى اتجاه متضادين

الحل:

أولاً: القوة المعلومة والمحصلة فى اتجاه واحد :

نفرض \vec{U} متجه وحدة فى اتجاه \vec{C}

$$\therefore \vec{U} = \vec{C} \quad , \quad \vec{U} = \vec{C} \quad \therefore \vec{U} = \vec{C}$$

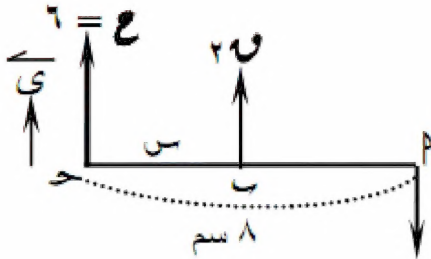
$$\therefore \vec{U} = \vec{C} \quad \therefore \vec{U} = \vec{C} \quad \therefore \vec{U} = \vec{C} \quad \therefore \vec{U} = \vec{C}$$

$\therefore \vec{U} = \vec{C} \quad \therefore \vec{U} = \vec{C} \quad \therefore \vec{U} = \vec{C} \quad \therefore \vec{U} = \vec{C}$

\therefore مجموع عزوم القوى حول ج = عزم المحصلة حول ج = صفر

$$\therefore 0 = 8 \times 4 + 2 \times 6 \quad \therefore 0 = 32 + 12 \quad \therefore 0 = 44$$

\therefore البعد بين خطى عمل القوتين = $8 + 6 = 14$ سم



ثانياً: القوة المعلومة والمحصلة فى اتجاهين متضادين

نفرض \vec{U} متجه وحدة فى اتجاه \vec{C}

$$\therefore \vec{U} = \vec{C} \quad , \quad \vec{U} = -\vec{C} \quad \therefore \vec{U} = \vec{C}$$

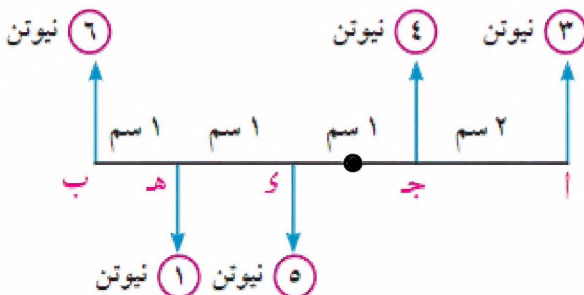
$$\therefore \vec{U} = \vec{C} \quad \therefore \vec{U} = \vec{C} \quad \therefore \vec{U} = \vec{C} \quad \therefore \vec{U} = \vec{C}$$

$\therefore \vec{U} = \vec{C} \quad \therefore \vec{U} = \vec{C} \quad \therefore \vec{U} = \vec{C} \quad \therefore \vec{U} = \vec{C}$

\therefore مجموع عزوم القوى حول ج = عزم المحصلة حول ج = صفر

$$\therefore 0 = 8 \times 4 + 10 \times 2 \quad \therefore 0 = 32 + 20 \quad \therefore 0 = 52$$

\therefore البعد بين خطى عمل القوتين = $8 - 3 = 5$ سم

مثال:

الشكل المقابل يمثل مجموعة من القوى المتوازية

العمودية على \overline{AB}

أوجد القياس الجبرى لمجموع عزوم القوى بالنسبة

(أ) نقطة أ (ب) نقطة منتصف \overline{AB}

الحل:

(أ) العزوم حول نقطة أ

القوة ٣ نيوتن تمر بنقطة أ فيكون عزومها يساوى صفر وبمراعاة اتجاه دوران باقى القوى حول أ فإن:

القياس الجبرى للعزوم حول أ

$$0 = 5 \times 6 - 2 \times 4 - 4 \times 1 + 3 \times 0 = 19 \text{ نيوتن. سم}$$

(ب) العزوم حول منتصف أ ب

القياس الجبرى للعزوم حول منتصف أ ب

$$0 = 1,5 \times 1 + 0,5 \times 0 + 2,5 \times 3 - 0,5 \times 4 - 2,5 \times 6 = 1,5 \text{ نيوتن. سم}$$

مثال:

أ، ب، ج، د، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث أ ب = ٤ سم، ب ج = ٦ سم، ج د = ٨ سم، د هـ = ١٠ سم. أثرت خمس قوى مقاديرها ٦٠، ٣٠، ٥٠، ٨٠، ٤٠ ث.كجم فى النقط أ، ب، ج، د، هـ على الترتيب وفى إتجاه عمودى على أ هـ بحيث كانت القوى الثلاثة الأولى متحدة الإتجاه، والقوتان الأخريان فى الإتجاه المضاد. عين محصلة المجموعة.

الحل:نفرض \vec{y} وحدة متجهات فى إتجاه القوى الثلاثة أى رأسيا لأسفل كما بالشكل

$$\therefore \vec{y} = \vec{60} + \vec{30} + \vec{50} - \vec{80} - \vec{40} = \vec{140} - \vec{120} = \vec{20}$$

∴ ح = ٢٠ ث.كجم

وفى إتجاه القوى الثلاثة أى رأسيا لأسفل
لتحديد خط عمل المحصلة

نفرض أن المحصلة تقطع أ هـ فى نقطة م

وتبعد عن أ مسافة س

بأخذ العزوم حول أ

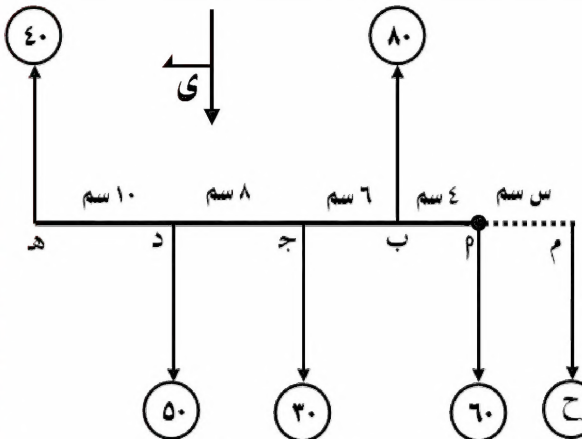
∴ عزم المحصلة حول أ = المجموع الجبرى لعزوم القوى حول أ

$$\therefore 20 \times s = 28 \times 40 - 4 \times 80 - 18 \times 50 + 10 \times 30 + 0 \times 60$$

$$\therefore 20s = 1120 - 320 - 900 + 300 = 200$$

$$\therefore s = \frac{200}{20} = 10 \text{ سم}$$

أى أن المحصلة = ٢٠ ث.كجم وتعمل رأسيا لأسفل وخط عملها يقع يمين أ على بعد ١٢ سم



مثال:

١، ب، ج، د، هـ نقط تقع على خط مستقيم واحد بحيث ٢ب = ٣بج = ٢جد = ٤ده = ١٢ سم .
أثرت قوى مقاديرها ٣، ١٠، ٢٠ نيوتن عند النقط ١، ج، هـ على الترتيب فى إتجاه واحد عمودى على \overline{AH}
كما أثرت قوتان مقدارهما ٤، ٢٠ نيوتن عند ب، د على الترتيب وفى إتجاه مضاد للقوى الأولى . فإذا
كان مقدار محصلة المجموعة = ٥ نيوتن وتمر بنقطة ب وفى إتجاه القوى الثلاث الأولى أوجد ١٠، ٢٠

الحل:

$$\therefore ٢ب = ٣بج = ٢جد = ٤ده = ١٢ \text{ سم}$$

$$\therefore ٢ب = ١٢ \text{ سم} , بـج = ٤ \text{ سم} , جـد = ٦ \text{ سم} , دـه = ٣ \text{ سم}$$

نفرض \vec{u} متجه وحدة فى إتجاه \overline{AH}

$$\therefore \vec{H} = ٣\vec{u} + ١٠\vec{u} - ٤\vec{u} - ٢٠\vec{u}$$

$$\therefore ٥\vec{u} = ٩\vec{u} - ١٠\vec{u} - ٢٠\vec{u}$$

$$\therefore ٤ = ١٠ - ٢٠ \quad (١)$$

بأخذ العزوم حول جـ

\therefore عزم المحصلة حول جـ = المجموع الجبرى لعزوم القوى حول جـ

$$\therefore ٩ \times ١٠ - ٦ \times ٢٠ + ٠ \times ١٠ + ٤ \times ٤ - ١٦ \times ٣ = ٤ \times ٥$$

$$\therefore ٩٠ - ١٢٠ + ١٦ - ٤٨ = ٢٠$$

$$\therefore ٧٨ = ٢٠٦ \quad \Leftarrow \quad ١٣ = \frac{٧٨}{٦} = ٢٠ \text{ نيوتن}$$

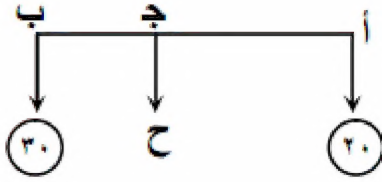
بالتعويض فى (١)

$$\therefore ٤ = ١٣ - ١٠ \quad \Leftarrow \quad ٤ = ١٣ + ٤ - ١٠ \quad \Leftarrow \quad ٩ = ١٠ \text{ نيوتن}$$

مثال:

قوتان متوازيتان وفى إتجاه واحد مقدارهما ٢٠، ٣٠ نيوتن تؤثران فى النقطتين ١، ب على الترتيب ، فإذا
تحركت القوة ٢٠ نيوتن بحيث تظل موازية لنفسها مسافة قدرها ٥ س على الشعاع \overline{AB} فأثبت أن محصلة
القوتين تتحرك مسافة قدرها $\frac{٢}{٥}$ س فى نفس الإتجاه.

الحل:

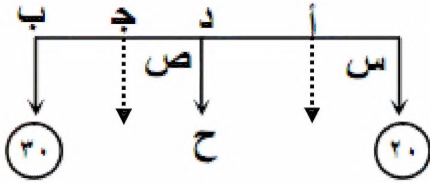


اولا: قبل تحرك القوة ٢٠ نيوتن

$$\therefore 50 = 30 + 20 = 20 + 30 = 50 \text{ نيوتن}$$

وتؤثر عند نقطة ج حيث ج د ا ب

$$(1) \quad 30 \times 2 = 20 \times 3 \therefore 30 \times 2 = 20 \times 3$$



ثانيا: القوة ٢٠ تحركت مسافة س على الشعاع ب ا
نفرض أن المحصلة تحركت من ج الى د مسافة ص

$$\therefore 50 = 30 + 20 = 20 + 30 = 50 \text{ نيوتن}$$

وتؤثر عند نقطة د حيث د ج ا ب

$$\therefore 20 \times (3 + 2) = 30 \times (2 + 1)$$

$$\therefore 20 \times (3 + 2) = 30 \times (2 + 1)$$

$$\therefore 20 \times 5 = 30 \times 3 + 20 \times 2$$

$$\therefore 20 \times 5 = 30 \times 3 + 20 \times 2 \quad \therefore 100 = 90 + 40 = 130$$

\therefore المحصلة تحركت مسافة قدرها $\frac{2}{5}$ س في نفس الاتجاه

مثال:

تؤثر القوتان \vec{P} و \vec{Q} في النقطتين ١ و ٢، $\vec{P} = 3\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2$ ، $\vec{Q} = 3\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2$ ، ب (٢، ١) على الترتيب. أوجد محصلة القوتين ونقطة تأثيرها.

الحل:

$$\therefore \vec{P} = 3\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2 = 3(\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2$$

\therefore القوتان متوازيتان وفي اتجاهين متضادين

$$\therefore \vec{P} + \vec{Q} = \vec{R} \quad \therefore 3\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2 + 3\vec{e}_1 - 9\vec{e}_2 = \vec{R}$$

$$\therefore \vec{R} = 6\vec{e}_1 - 18\vec{e}_2 = 6(\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2) = 6\vec{e}_1 - 18\vec{e}_2$$

نفرض أن المحصلة تؤثر في نقطة ج حيث ج د ا ب لكن ج د ا ب

$$\therefore 6 \times 1 = 3 \times 2 \quad \therefore 6 \times 1 = 3 \times 2$$

 مثال :

✍ الحل :

مهندس / السيد محمود

اتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية

٣ - ٢

إتزان مجموعة من القوى المتوازية المستوية:

قاعدة: إذا إتزن جسم تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية المستوية فإن:

- (١) مجموع القياسات الجبرية لهذه القوى (بالنسبة لمتجه وحده يوازئها) يساوى صفر
- (٢) مجموع القياسات الجبرية لعزوم هذه القوى حول أى نقطة فى مستويها يساوى صفر

وبتطبيق الشرطين السابقين نحصل على معادلتين فى مجهولين وبحلها نحصل على قيمتيهما

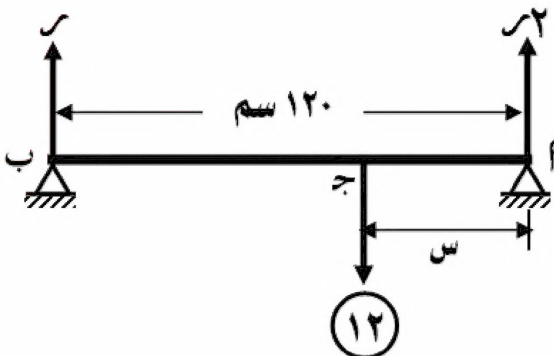
ملاحظات هامة:

- (١) إذا إرتكز قضيب أفقيا على حاملين ثم علق ثقل فى أحد طرفيه بحيث يكون القضيب على وشك الدوران أو الانقلاب حول أحد الحاملين أو على وشك الانفصال عن الحامل فإن رد الفعل عند الحامل الآخر ينعدم.
- (٢) إذا علق قضيب من طرفيه بخيطين رأسيين فإن أكبر ثقل يمكن تعليقه فى أحد طرفى القضيب دون أن يختل التوازن يجعل مقدار الشد فى الطرف الآخر ينعدم.

مثال:

ساق مهمة الوزن طولها ١٢٠ سم ترتكز فى وضع أفقى عند طرفيها على حاملين . عند أى موضع من الساق يجب تعليق ثقل قدره ١٢ ث. كجم حتى يصبح مقدار رد الفعل عند أحد الطرفين مساويا لضعف قيمته عند الطرف الآخر.

الحل:



نفرض أن الثقل يتم تعليقه على بعد من $P = 120$ سم
وأن رد الفعل عند $B = R$. رد الفعل عند $P = R_2$
∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى متوازية

∴ مجموع القياسات الجبرية القوى = صفر

$$0 = 120 - R + R_2$$

$$∴ 120 = R_3 = R \quad \Leftarrow \quad ∴ R = 4 \text{ ث. كجم}$$

مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أى نقطة = صفر

$$∴ \text{العزوم حول } P = 0$$

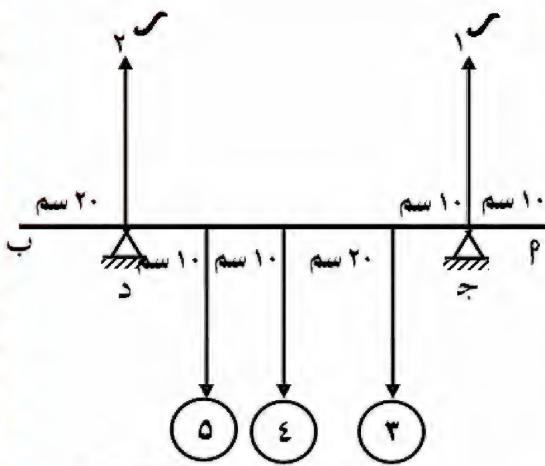
$$∴ 120 \times 12 - R \times 120 = 0 \quad \Leftarrow \quad ∴ 120 \times 4 - 120 \times s = 0$$

∴ س = $\frac{120 \times 4}{12} = 40$ سم أى أنه يتم تعليق الثقل على بعد 40 سم من أى من الطرفين ويكون رد الفعل عند الحامل القريب من نقطة التعليق يساوى ضعف رد الفعل عند الحامل الآخر

مثال:

قضيب منتظم ب طوله 80 سم ووزنه 4 ث. كجم يؤثر فى منتصفه ويرتكز فى وضع أفقى على حاملين أحدهما على بعد 10 سم من ب والثانى على بعد 20 سم من ب وعلق فى القضيب ثقلان مقدارهما 3، 5 ث. كجم على بعدى 20 سم من ب ، 30 سم من ب على الترتيب. عين الضغط على كل من الحاملين.

الحل:



∴ القضيب متزن تحت تأثير خمس قوى متوازية

∴ مجموع القياسات الجبرية القوى = صفر

$$0 = 5 - 4 - 3 - R_B + R_J$$

$$0 = 5 - 4 - 3 - R_B + R_J \quad (1)$$

مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أى نقطة = صفر

∴ العزوم حول ج = 0

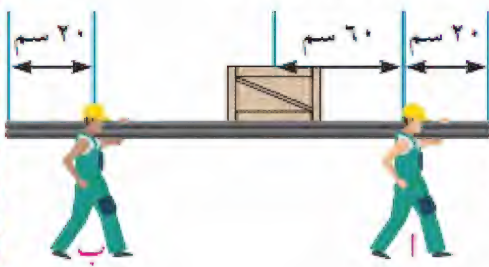
$$0 = 5 \times 3 - 4 \times 5 + 3 \times 4 + 1 \times 3$$

$$350 = 350 \quad \therefore R_B = 7 \text{ ث. كجم}$$

بالتعويض فى (1) ∴ $12 = 7 + R_J \quad \therefore R_J = 5 \text{ ث. كجم}$

لاحظ أنه كان يمكن اخذ العزوم حول النقطة د لحذف R_B وإيجاد R_J أولا ثم R_B أو أخذ العزوم حول أى نقطة أخرى مثل ب أو ج وتكوين معادلة ثانية فى R_B ، ثم حلها مع المعادلة (1)

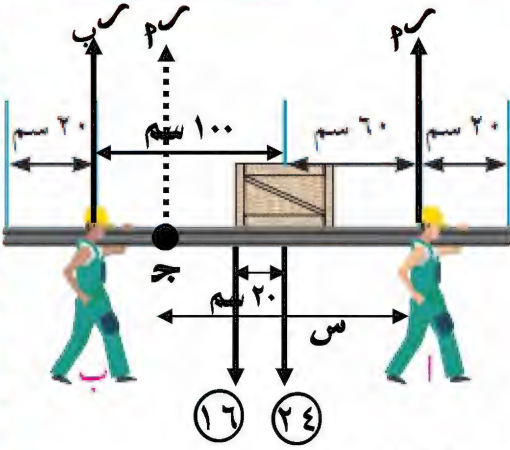
مثال:



رجلان أ ، ب يحملان لوح من الخشب طوله 2 متر ووزنه 16 ث. كجم يؤثر عند منتصفه يحمل صندوقا وزنه 24 ث. كجم كما هو موضح بالشكل أوجد الضغط على كتف كل رجل ثم عين عند أى نقطة من اللوح يكون موضع كتف الرجل ب حتى يتساوى الضغطين.

الحل:

∴ اللوح متزن تحت تأثير مجموعة من القوى المتوازية



∴ مجموع القياسات الجبرية القوى = صفر

$$∴ \text{سم} + \text{سم} = 16 + 24$$

$$∴ \text{سم} + \text{سم} = 40 \quad (1)$$

مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أي نقطة = صفر

$$∴ \text{العزوم حول } P = 0$$

$$∴ 0 = 160 \times \text{سم} - 80 \times 16 + 60 \times 24$$

$$∴ 160 \times \text{سم} = 2720 \quad \leftarrow \quad ∴ \text{سم} = \frac{2720}{160} = 17 \text{ ث.كجم}$$

$$\text{بالتعويض في (1)} \quad ∴ 40 = 17 + \text{سم} \quad \leftarrow \quad ∴ \text{سم} = 40 - 17 = 23 \text{ ث.كجم}$$

نفرض أن النقطة ج يكون عندها كتف الرجل ب حتى يتساوى الضغطين حيث $P = \text{ج} = \text{س}$

$$∴ \text{سم} + \text{سم} = 40 \quad ∴ 2 \times \text{سم} = 40 \quad ∴ \text{سم} = 20 \text{ ث.كجم}$$

$$∴ \text{العزوم حول } P = 0 \quad ∴ 0 = \text{سم} \times \text{سم} - 80 \times 16 + 60 \times 24$$

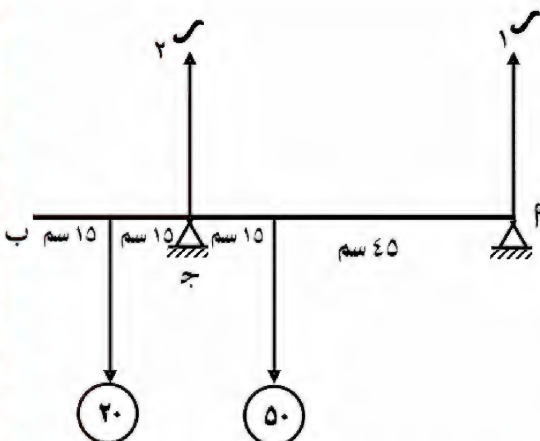
$$∴ 20 \times \text{سم} = 2720 \quad \leftarrow \quad ∴ \text{سم} = \frac{2720}{20} = 136 \text{ سم}$$

∴ كتف الرجل ب يكون عند نقطة على بعد 136 سم من الرجل P حتى يتساوى الضغطين

مثال:

يرتكز قضيب P ب طوله 90 سم ووزنه 50 نيوتن ويؤثر في منتصفه في وضع أفقي على حاملين أحدهما عند الطرف A والآخر عند نقطة ج تبعد 30 سم عن B ويحمل ثقلاً مقداره 20 نيوتن عند نقطة تبعد 15 سم عن B. عين الضغط على كل من الحاملين. وأوجد أيضاً مقدار الثقل الذي يجب تعليقه من الطرف B بحيث يصبح القضيب على وشك الدوران وما قيمة الضغط على الحامل عند ج عندئذ.

الحل:



∴ القضيب متزن تحت تأثير أربع قوى متوازية

∴ مجموع القياسات الجبرية القوى = صفر

$$∴ \text{سم} + \text{سم} - 50 - 20 = 0$$

$$∴ \text{سم} + \text{سم} = 70 \quad (1)$$

مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أي نقطة = صفر

$$∴ \text{العزوم حول } P = 0$$

$$∴ 0 = 60 \times \text{سم} - 70 \times 20 + 45 \times 50$$

$$3750 = 62.5 \times 60 = 3750 \text{ نيوتن}$$

$$\text{بالتعويض في (1)} \quad 70 = 62.5 + 6 \text{ نيوتن}$$

نفرض أن الثقل الذي يتم تعليقه عند ب بحيث يصبح القضيب على وشك الدوران = و . ث. كجم

∴ القضيب سيكون على وشك الدوران حول ج

∴ رد الفعل عند الحامل الموجود عند ٢ = ٠

∴ القضيب متزن تحت تأثير أربع قوى متوازية

∴ مجموع القياسات الجبرية القوى = صفر

$$0 = 9 - 20 - 50 - 70$$

$$70 = 9 - 20 - 50 \quad (2)$$

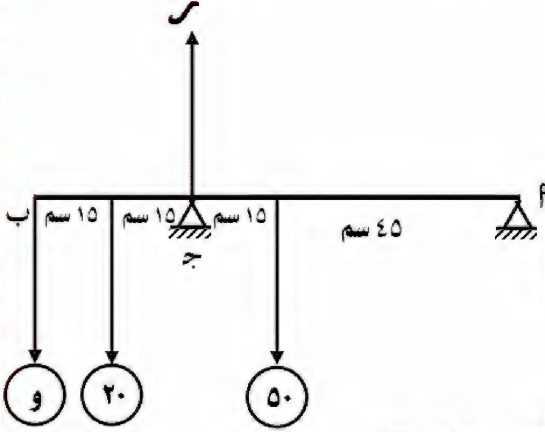
مجموع القياسات الجبرية لعزوم القوى حول أي نقطة = صفر

∴ العزوم حول ج = ٠

$$0 = 30 \times 9 + 10 \times 20 + 10 \times 50 - 450$$

$$450 = 30 \times 9 + 10 \times 20 + 10 \times 50 \quad \text{نيوتن}$$

$$\text{بالتعويض في (2)} \quad 70 = 15 - 70 = 85 \text{ نيوتن}$$



مثال:

قضيب غير منتظم طوله ١٤٠ سم محمول أفقياً بخيطين رأسيين أحدهما عند ب والآخر يبعد ٤٠ سم من ٢ ، فإذا كان الشد في الخيط الأول $\frac{1}{4}$ الشد في الخيط الثاني، فعين نقطة تأثير وزن القضيب وإذا علم أن أكبر ثقل يلزم تعليقه من ٢ دون أن يختل التوازن هو ١٢ نيوتن فأوجد وزن القضيب.

الحل:

نفرض أن الوزن يؤثر عند نقطة د حيث ج د = س

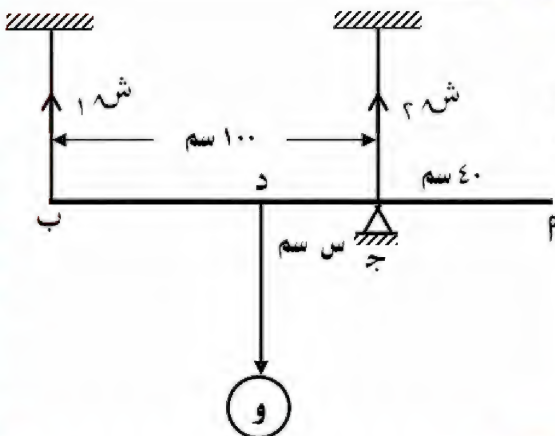
$$\text{∴ الشد عند ب} = \frac{1}{4} \text{ الشد عند ٢}$$

$$\text{∴ شـ ٢} = 4 \text{ شـ ١} \quad (1)$$

∴ القضيب متزن تحت تأثير ثلاث قوى متوازية

∴ المجموع الجبري للعزوم حول أي نقطة = صفر

∴ العزوم حول د = ٠



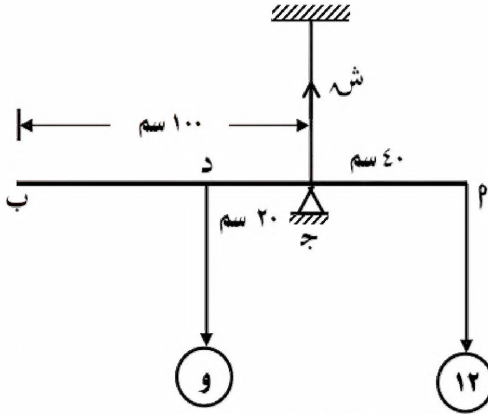
$$\therefore \text{ش}_٢ \times \text{ج د} - \text{ش}_١ \times \text{ب د} = ٠$$

$$\therefore \text{ش}_٢ \times \text{س} - \text{ش}_١ \times (١٠٠ - \text{س}) = ٠ \text{ بالتعويض من (١) عن ش}_٢$$

$$\therefore ٤ \text{ش}_١ \times \text{س} - \text{ش}_١ \times (١٠٠ - \text{س}) = ٠ \text{ بالقسمة على ش}_١$$

$$\therefore ٤\text{س} - ١٠٠ + \text{س} = ٠ \therefore ٥\text{س} = ١٠٠ \Leftarrow \therefore \text{س} = \frac{١٠٠}{٥} = ٢٠ \text{ سم}$$

أي أن الوزن يؤثر في نقطة على بعد ٢٠ سم من أ



∴ أكبر ثقل يلزم تعليقه عند أ دون أن يختل التوازن = ١٢ نيوتن

∴ القضيب سيكون على وشك الدوران حول ج

∴ الشد في الخيط عند ب = ٠

∴ المجموع الجبري للعزوم حول أي نقطة = صفر

∴ العزوم حول ج = ٠

$$\therefore ١٢ \times \text{ج أ} - ٩ \times \text{ج د} = ٠$$

$$\therefore ١٢ \times ٤٠ - ٩ \times ٢٠ = ٠ \Leftarrow \therefore ٩ \times ٢٠ = \frac{١٢ \times ٤٠}{٢} = ٢٤ \text{ نيوتن}$$

مثال:

أب قضيب غير منتظم طوله ١٢٠ سم إذا ثبت عند طرفه ب ثقلا قدره ١ نيوتن وعلق من أ ثقلا قدره ١٦ نيوتن فإن القضيب يتزن في هذه الحالة عند نقطة تبعد ٣٠ سم من أ وإذا أنقص الثقل الموجود عند أ وصار ٨ نيوتن فإن القضيب يتزن في هذه الحالة عند نقطة تبعد ٤٠ سم من أ. أوجد وزن القضيب وبعد نقطة تأثير وزنه عن أ.

الحل:

نفرض أن الوزن (و) يؤثر عند نقطة على بعد س من الطرف

الحالة الأولى:

الثقل المعلق من أ = ١٦ نيوتن ونقطة الإلتزان على بعد ٣٠ سم

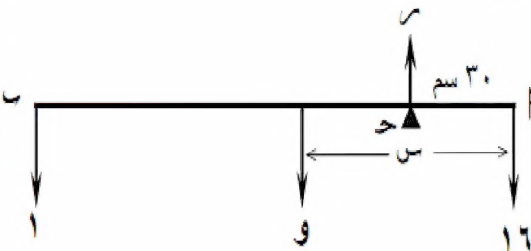
∴ القضيب متزن تحت تأثير أربع قوى متوازية

∴ المجموع الجبري للعزوم حول أي نقطة = صفر

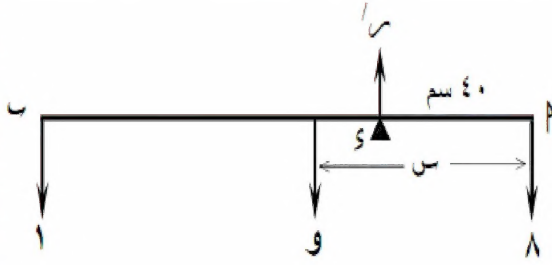
∴ العزوم حول ج = ٠

$$\therefore ١٠ \times ٩ + ٩ \times (٣٠ - \text{س}) - ١٦ \times ٣٠ = ٠$$

$$\therefore ٣٩٠ = (٣٠ - \text{س}) \times ٩ \quad (١)$$



الحالة الثانية:



الثقل المعلق من $P = 8$ نيوتن ونقطة الإتزان على بعد ٤٠ سم
 ∴ القضيب متزن تحت تأثير أربع قوى متوازية

∴ المجموع الجبرى للعزوم حول أى نقطة = صفر

∴ العزوم حول $P = 0$

$$\therefore 0 = 40 \times 8 - (40 - s) \times 9 + 1 \times 40 \quad \leftarrow \quad \therefore 240 = (40 - s) \times 9 \quad (2)$$

بقسمة المعادلتين (١)، (٢)

$$\therefore \frac{390}{240} = \frac{(30 - s)}{(40 - s)} \quad \leftarrow \quad \therefore \frac{13}{8} = \frac{30 - s}{40 - s}$$

$$\therefore 13 \times 40 - 8s = 520 - 8s \quad \leftarrow \quad 520 - 8s = 520 - 8s$$

$$\therefore 520 - 8s = 520 - 8s \quad \leftarrow \quad 280 = 8s \quad \therefore s = \frac{280}{8} = 35 \text{ سم}$$

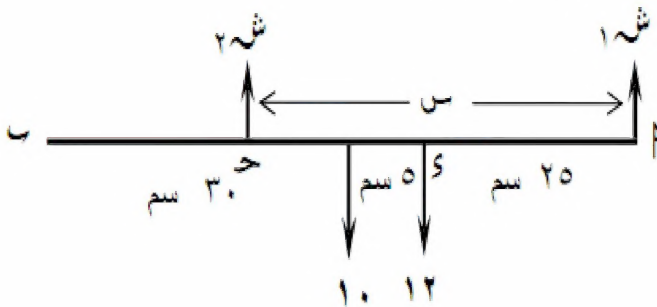
$$\text{بالتعويض فى (١)} \quad \therefore 390 = (30 - 35) \times 9 + 1 \times 40 \quad \leftarrow \quad 390 = -45 + 40 \quad \therefore 15 = 40 - 35 \quad \therefore 15 \text{ نيوتن}$$

∴ وزن القضيب = ١٥ نيوتن ويؤثر على بعد ٣٥ سم من الطرف P

مثال:

قضيب منتظم P ب طول ٦٠ سم ووزنه ١٠ ث. جم ويؤثر فى منتصفه معلق فى وضع أفقى بواسطة خيطين رأسيين احدهما مربوط فى نقطة P والآخر فى نقطة Q حيث $PQ = 30$ سم ، علق ثقل قدره ١٢ ث. جم فى نقطة S حيث $SP = 25$ سم فإذا كان أقصى شد يتحمله كل خيط هو ١٥ ث. جم فأوجد القيم التى تقع بينها s ، وأوجد أيضا أكبر وأقل قيمة للشد فى كل من الخيطين.

الحل:



∴ القضيب متزن ∴ المجموع القياسات الجبرية القوى = صفر

$$\therefore 22 = 3 + 1 \quad (1)$$

∴ أقصى شد يتحمله كل خيط هو ١٥ ث. جم

أولاً: نفرض أن $3 = 1$ وصلت الى أقصى قيمة

$$\therefore 3 = 1 \quad \text{ومن (١)} \quad \therefore 3 = 1 \quad \therefore 7 = 3$$

∴ المجموع الجبرى للعزوم حول أى نقطة = صفر

∴ العزوم حول $P = 0$

$$\therefore 0 = 3 \times 7 - 30 \times 10 + 25 \times 12$$

∴ ٦٠٠ = ٧ س ∴ س = $\frac{600}{7} \approx 85,7$ سم وهذه القيمة اكبر من طول القضيب

∴ ش_١ لا يمكن أن تصل الى القيمة ١٥ ث.جم

∴ نأخذ س بأكبر قيمة ممكنة لها وهى طول القضيب أى ان س = ٦٠ سم ونحسب قيم ش_١، ش_٢

$$\therefore \text{العزوم حول } P = 0 \therefore 0 = 60 \times 10 + 25 \times 12 - 30 \times 10 - \text{ش}_2 \times 60 \therefore 60 \times 10 = \text{ش}_2 \times 60$$

$$\therefore \text{ش}_2 = \frac{600}{60} = 10 \text{ ث.جم}$$

$$\text{بالتعويض فى (١)} \therefore 22 = 10 + \text{ش}_1 \therefore \text{ش}_1 = 22 - 10 = 12 \text{ ث.جم}$$

ثانياً: نفرض أن ش_٢ وصلت الى اقصى قيمة ∴ ش_٢ = ١٥ ومن (١) ∴ ش_١ = ٧

∴ العزوم حول P = ٠

$$\therefore 0 = 15 \times 10 - 30 \times 10 + 25 \times 12 - \text{ش}_1 \times 60 \therefore 60 \times \text{ش}_1 = 600 \therefore \text{ش}_1 = \frac{600}{60} = 10 \text{ سم}$$

∴ القيم التى تقع بينها س هى ٤٠ سم ، ٦٠ سم

اكبر قيمة للشد عند P = ١٢ ث.جم ، أقل قيمة للشد عند P = ٧ ث.جم
واكبر قيمة للشد عند B = ١٥ ث.جم ، أقل قيمة للشد عند B = ١٠ ث.جم

مثال:

تؤثر القوى المستوية المترنة والمتوازية \vec{U} ، \vec{V} ، \vec{W} ، \vec{X} فى النقاط P = (٢، ١) ، B = (٤، -٣)

$$\text{ج} = (٥، ٣) ، S = (١، ٠) \text{ على الترتيب فإذا كانت } \vec{U} = 3\vec{S} + 4\vec{V} ، ||\vec{U}|| = 20$$

نيوتن فى نفس اتجاه \vec{U} . أوجد كلا من \vec{V} ، \vec{W} إذا كانت تعملان فى اتجاه مضاد لاتجاه \vec{U} .

الحل:

$$\therefore \vec{U} \parallel \vec{V} \therefore \vec{U} = k\vec{V} \therefore ||\vec{U}|| \times |k| = ||\vec{V}||$$

$$\therefore 20 = |k| \times \sqrt{2^2 + 3^2} \therefore |k| = \frac{20}{\sqrt{13}} \therefore k = \pm \frac{20}{\sqrt{13}}$$

$$\therefore \vec{V} \text{ فى نفس اتجاه } \vec{U} \therefore k = \frac{20}{\sqrt{13}} \therefore \vec{V} = \frac{20}{\sqrt{13}} \vec{U} = \frac{20}{\sqrt{13}} (3\vec{S} + 4\vec{V})$$

$$\therefore \vec{V} = \frac{20}{\sqrt{13}} (3\vec{S} + 4\vec{V}) \therefore \vec{V} \text{ تعملان فى اتجاه مضاد لاتجاه } \vec{U}$$

$$\therefore \bar{U}_3 = \bar{L} - (\bar{S}_3 + \bar{S}_4) = \bar{U}_4, \quad \bar{U}_4 = \bar{U}_2 - (\bar{S}_2 + \bar{S}_3)$$

$$\therefore \text{القوى متزنة} \therefore \bar{U}_4 = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3 + \bar{U}_4$$

$$\therefore \bar{U}_4 = \bar{S}_3 + \bar{S}_4 + \bar{S}_1 + \bar{S}_2 - \bar{L}_1 - \bar{L}_2 - \bar{L}_3 - \bar{L}_4 - \bar{S}_2 - \bar{S}_3 - \bar{S}_4 - \bar{S}_1 = 0$$

$$\therefore \bar{U}_4 = \bar{S}_2(23 - 15 - 10) + \bar{S}_3(24 - 14 - 20) = 0$$

$$\therefore 0 = 23 - 15 - 10 \therefore 10 = 23 + 15 \therefore 0 = 2 + 1 \therefore (1)$$

$$\therefore \text{مجموع العزوم حول أى نقطة = صفر} \therefore \bar{U}_4 = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3 + \bar{U}_4$$

$$\therefore \bar{U}_4 = \bar{U}_1 \times \bar{P}_1 + \bar{U}_2 \times \bar{P}_2 + \bar{U}_3 \times \bar{P}_3 + \bar{U}_4 \times \bar{P}_4$$

$$\therefore 0 = (24 - 15) \times (10 - 1) + (14 - 20) \times (5 - 3) + (16 - 12) \times (3 - 4) + (4 - 3) \times (1 - 2) \therefore$$

$$0 = 0 + 24 + 10 + 12 - 36 + 6 - 3 + 8 \therefore$$

$$\therefore 17 = 24 + 13 \therefore (2)$$

بحل المعادلتين (1)، (2) جبرياً بضرب طرفى المعادلة (1) فى (2)

$$\therefore 20 = 24 - 14 \therefore$$

$$\therefore 17 = 24 + 13 \text{ بالجمع} \therefore$$

$$\therefore \bar{U}_4 = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3 + \bar{U}_4 \therefore \bar{U}_4 = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3 + \bar{U}_4$$

$$\therefore \bar{U}_4 = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3 + \bar{U}_4 \therefore \bar{U}_4 = \bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \bar{U}_3 + \bar{U}_4$$

